Title	Asymptotic properties of estimators in errors-in-variables models(Statistical Decision for Multiple Comparison and Its Related Topics)
Author(s)	大貫, 光隆; 赤平, 昌文
Citation	数理解析研究所講究録 (2007), 1560: 64-79
Issue Date	2007-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/81067
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1560 巻 2007 年 64-79

Asymptotic properties of estimators in errors-in-variables models

筑波大・数理物質 大貫 光隆 (Mitsutaka Ohnuki)
Graduate School of Pure and Applied Sciences
University of Tsukuba
筑波大・数理物質 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)
Graduate School of Pure and Applied Sciences
University of Tsukuba

1 はじめに

統計学において回帰分析は重要であり線形回帰モデルの係数の推定として最小 2 乗推定量が用いられている ([L99]). 通常の回帰モデルにおいて, 説明変数は非確率変数であるが, 説明変数の確率誤差を考慮に入れる変数誤差モデルも考えられている ([F87], [AK00]). 変数誤差モデルにおいては, 通常, 確率誤差は正規分布に従うと仮定して, 係数の最小 2 乗推定量の漸近正規性が示されているが, 最近, 単回帰型の変数誤差モデルにおいて確率誤差の分布を特定せずに, 独立同分布の場合に漸近正規性が論じられた (Gleser [G81], Miao et al.[MYS07]). 本論の第 2 節において [MYS07] の結果をさらに拡張して, 単回帰型の変数誤差モデルにおいて確率誤差の分布を特定せずに, 独立であるが同分布でない場合に最小 2 乗推定量の漸近正規性について論じる. また, 第 3 節においては, Fazekas and Kukush [FK97] に基づいて非線形の変数誤差モデルにおける推定量の一致性および大偏差確率の評価について述べる.

2 単回帰型の変数誤差モデルにおける推定量の漸近正規性

まず, 単回帰型の変数誤差モデル

$$y_i = \alpha + \beta\xi_i + \delta_i \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{2.1}$$
$$x_i = \xi_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.2}$$

を考える. ここで, 各 i について y_i と x_i は観測され, $\xi_1, \cdots, \xi_n$ は局外母数で, ε_i と δ_i は確率誤差項とする. モデル (2.1), (2.2) の下で, $(\varepsilon_1, \delta_1), (\varepsilon_2, \delta_2), \cdots$ を独立な確率ベクトル列とし, 平均, 分散, 共分散が各 $i = 1, 2, \cdots$ について $E(\delta_i) = E(\varepsilon_i) = 0$, $V(\delta_i) = \sigma_{1i}^2 < \infty$, $V(\varepsilon_i) = \sigma_{2i}^2 < \infty$, $-\infty < Cov(\delta_i, \varepsilon_i) = u_i < \infty$ とする. また, 定数 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, u_{12}$ が存在して, 任意の $i = 1, 2, \cdots$ について

$$\frac{\sigma_{1i}^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sigma_{2i}^2}{\sigma_2^2} = \frac{u_i}{u_{12}} =: w_i^2$$

が成り立つとする. 特に, $w_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots)$ とすれば, [MYS07] において論じられた場合になる. さて, モデル (2.1), (2.2) より,

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \delta_i - \beta\varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.3}$$

となり, $w_i = \sqrt{w_i^2}$ として, (2.3) の両辺を w_i で割ると

$$\frac{y_i}{w_i} = \frac{\alpha}{w_i} + \beta\frac{x_i}{w_i} + \frac{\delta_i - \beta\varepsilon_i}{w_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.4}$$

となり,

$$V\left(\frac{\delta_i - \beta\varepsilon_i}{w_i}\right) = \frac{V(\delta_i)}{w_i^2} + \beta^2\frac{V(\varepsilon_i)}{w_i^2} - 2\beta\frac{Cov(\delta_i, \varepsilon_i)}{w_i^2} = \sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2 - 2\beta u_{12} =: \sigma_{12}^{*2}$$

となるので, (2.4) について, 最小 2 乗法を用いると, β, α の推定量はそれぞれ

$$\hat{\beta}_{n,w} := \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})(y_i - \bar{y}_{n,w})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2}, \quad \hat{\alpha}_{n,w} := \bar{y}_{n,w} - \hat{\beta}_{n,w}\bar{x}_{n,w}$$

となる. ただし, $\bar{x}_{n,w} := \left(\sum_{i=1}^n x_i/w_i^2\right) \Big/ \sum_{i=1}^n 1/w_i^2$, $\bar{y}_{n,w} = \left(\sum_{i=1}^n y_i/w_i^2\right) \Big/ \sum_{i=1}^n 1/w_i^2$ とする. 上で定義された $\hat{\beta}_{n,w}, \hat{\alpha}_{n,w}$ はそれぞれ β, α の荷重最小 2 乗推定量と呼ばれている. ここで, $\bar{\xi}_{n,w} := \left(\sum_{i=1}^n \xi_i/w_i^2\right) \Big/ \sum_{i=1}^n 1/w_i^2$ とする. このとき, $(\varepsilon_1, \delta_1), (\varepsilon_2, \delta_2), \cdots$ が独立同分布の場合を扱った Miao et al.[MYS07] と同様のアプローチで次の定理 2.1, 2.2 を得る.

定理 2.1 $S_{n,w} := \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_{n,w})^2/w_i^2$ とし, 条件

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{S_{n,w}}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\max_{i=1,\cdots,n} |(\xi_i - \bar{\xi}_{n,w})/w_i|}{\sqrt{S_{n,w}}} = 0$$

を仮定し, さらに, ある $d > 0$ が存在して $n \to \infty$ のとき

$$\frac{\sum_{i=1}^n |\xi_i - \bar{\xi}_{n,w}|^2 E\left[|\delta_i - \beta\varepsilon_i|^{2+d}\right] / w_i^{4+d}}{S_{n,w}}$$

が収束するとする. このとき

$$\frac{\sqrt{S_{n,w}}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w} - \beta) \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. ただし, Z は標準正規分布 N(0,1) に従う確率変数とし, 記号 $\xrightarrow{L}$ は法則収束を表すとする.

定理 2.1 を証明するために, まず次のよく知られた補題を述べる.

補題 2.1 (Lindeberg). $\{X_{ni}\}_{i=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots}$ を確率変数の三角配列とし, 任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して, $X_{n1}, \cdots, X_{nn}$ は互いに独立で各 i について $E[X_{ni}] = 0$, $\sigma_{ni}^2 := E[X_{ni}^2]$ とし, $s_n^2 := \sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_{ni}$ とする. このとき, 任意の $r > 0$ について

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_n^2} \int_{|X_{ni}| \geq r s_n} X_{ni}^2 dP = 0 \tag{2.5}$$

が成り立てば

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ.

証明は省略 (例えば[B95] p.359 参照). さらに, 次の5つの補題を準備する.

補題 2.2 条件 $\lim_{n\to\infty} n/\sqrt{S_{n,w}} = 0$ を仮定すれば,

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})^2 / w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty) \tag{2.6}$$

が成り立つ. ただし, $\bar{\varepsilon}_{n,w} = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i / w_i^2\right) \Big/ \sum_{i=1}^n 1/w_i^2$ とし, 記号 $\xrightarrow{P}$ は確率収束を表すとする.

証明 まず,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{w_i^2} - 2\bar{\varepsilon}_{n,w} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{w_i^2} + (\bar{\varepsilon}_{n,w})^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{w_i^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i / w_i^2\right)^2}{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2} \\
&\le \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{w_i^2}
\end{aligned}$$

となるので, 任意の $r > 0$ について

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})^2 / w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \ge r\right) \le P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 / w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \ge r\right)$$

となる. また, 仮定より十分大きい n について $n < \sqrt{S_{n,w}}$ となるから

$$\begin{aligned}
&P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 / w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \ge r\right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]} (\varepsilon_i^2 - \sigma_{2i}^2)/w_i^2 - \sum_{i=n+1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]} (\varepsilon_i^2 - \sigma_{2i}^2)/w_i^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_{2i}^2 / w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \ge r\right) \\
&\le P\left(\frac{\sum_{i=1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]} (\varepsilon_i^2 - \sigma_{2i}^2)/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \ge \frac{r}{2}\right) \\
&\quad + P\left(\frac{-\sum_{i=n+1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]} (\varepsilon_i^2 - \sigma_{2i}^2)/w_i^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_{2i}^2 / w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \ge \frac{r}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる. ただし, [ ] はガウス記号とする. さらに,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]}(\varepsilon_i^2-\sigma_{2i}^2)/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq\frac{r}{2}\right)\leq P\left(\left|\frac{1}{[\sqrt{S_{n,w}}]}\sum_{i=1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]}\frac{\varepsilon_i^2-\sigma_{2i}^2}{w_i^2}\right|\geq\frac{r}{2}\right)$$
$$\to 0\quad(n\to\infty)\quad(\text{大数の法則より})\tag{2.8}$$

になる. 一方,

$$\frac{\sum_{i=1}^n\sigma_{2i}^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}=\frac{n\sigma_2^2}{\sqrt{S_{n,w}}}$$

となり, 十分大きい n について, $n\sigma_2^2/\sqrt{S_{n,w}}<r/4$ となるので

$$\begin{aligned}
&P\left(\frac{-\sum_{i=n+1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]}(\varepsilon_i^2-\sigma_{2i}^2)/w_i^2+\sum_{i=1}^n\sigma_{2i}^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq\frac{r}{2}\right)\\
&=P\left(\frac{-\sum_{i=n+1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]}(\varepsilon_i^2-\sigma_{2i}^2)/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq\frac{r}{2}-\frac{\sum_{i=1}^n\sigma_{2i}^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\right)\\
&\leq P\left(\frac{-\sum_{i=n+1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]}(\varepsilon_i^2-\sigma_{2i}^2)/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq\frac{r}{4}\right)\\
&\leq P\left(\left|\frac{1}{[\sqrt{S_{n,w}}]-n}\sum_{i=n+1}^{[\sqrt{S_{n,w}}]}\frac{\varepsilon_i^2-\sigma_{2i}^2}{w_i^2}\right|\geq\frac{r}{4}\right)\\
&\to 0\quad(n\to\infty)\quad(\text{大数の法則より})
\end{aligned}\tag{2.9}$$

となる. よって (2.7), (2.8), (2.9) より (2.6) が示された. □

補題 2.3 $\lim_{n\to\infty}n/\sqrt{S_{n,w}}=0$ ならば,

$$\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}\xrightarrow{P}1\quad(n\to\infty)\tag{2.10}$$

が成り立つ.

証明 任意の $r>0$ について

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}-1\right|\geq r\right)&\leq P\left(\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}-1\leq -r\right)\\
&\quad+P\left(\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}-1\geq r\right)
\end{aligned}\tag{2.11}$$

となる. また, 任意の $r>0$ について

$$\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\bar{x}_{n,w})^2}{w_i^2}-\sum_{i=1}^n\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\leq\frac{r}{2}\sum_{i=1}^n\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^n\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\tag{2.12}$$

になる．なぜなら，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x}_{n,w})^2}{w_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2} \tag{2.13}$$

となるので，

$$\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2} \geq 0 \tag{2.14}$$

を示せる．実際，

$$\begin{aligned}
&\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\\
&=\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}+\frac{2}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})}{w_i}-\sqrt{\frac{2}{r}}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i}\right)^2\geq 0
\end{aligned}$$

となる．よって，(2.13), (2.14) より (2.12) が示される．このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}-1\geq r\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x}_{n,w})^2}{w_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\geq r\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\\
&\Rightarrow \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\geq r\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\qquad ((2.12)\text{ より})\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\geq\frac{r^2}{2(2+r)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}
\end{aligned}$$

となり，十分大きな n で $S_{n,w}>1$ となるので

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}-1\geq r\right)&\leq P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}\geq\frac{r^2}{2(2+r)}\right)\\
&\leq P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq\frac{r^2}{2(2+r)}\right)\\
&\to 0\quad (n\to\infty)\quad (\text{補題 2.2 より})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

となる. 次に, 任意の $r>0$ について

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x}_{n,w})^2}{w_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\geq -\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}-\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2} \tag{2.16}$$

になる. なぜなら,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x}_{n,w})^2}{w_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2} \tag{2.17}$$

となるので,

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\geq 0 \tag{2.18}$$

を示せる. 実際,

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\\
&=\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i^2}+\frac{2}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})}{w_i}+\sqrt{\frac{2}{r}}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})}{w_i}\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\geq 0
\end{aligned}$$

よって, (2.17), (2.18) より (2.16) が示される. このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}-1\leq -r\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x}_{n,w})^2}{w_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\leq -r\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\\
&\Rightarrow -\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}-\frac{2+r}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\leq -r\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}\qquad \text{((2.16) より)}\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2}{w_i^2}\geq \frac{r^2}{2(2+r)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}
\end{aligned}$$

となり, 十分大きな n で $S_{n,w}>1$ となるので

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}-1\leq -r\right)\leq P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{S_{n,w}}\geq \frac{r^2}{2(2+r)}\right)$$

$$\leq P\left(\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq\frac{r^2}{2(2+r)}\right)$$

$$\to 0 \quad (n\to\infty) \quad (\text{補題 2.2 より}) \tag{2.19}$$

となる. ゆえに, (2.11), (2.15), (2.19) より (2.10) が示された. □

補題 2.4 条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max_{i=1,\cdots,n}|(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})/w_i|}{\sqrt{S_{n,w}}}=0$$

を仮定し, ある $d>0$ が存在して, $n\to\infty$ のとき

$$\frac{\sum_{i=1}^n|\xi_i-\bar{\xi}_{n,w}|^2E\left[|\delta_i-\beta\varepsilon_i|^{2+d}\right]/w_i^{4+d}}{S_{n,w}}$$

が収束するとする. このとき

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\delta_i-\beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{S_{n,w}}}\xrightarrow{L}Z \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ.

証明 まず, 各 n と各 i について $X_{ni}:=(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\delta_i-\beta\varepsilon_i)/w_i^2$ とすると, 任意の n について, $X_{n1},\cdots,X_{nn}$ は互いに独立で, 各 i について

$$E[X_{ni}]=0, \quad \sigma_{ni}^2:=E[X_{ni}^2]=\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2V(\delta_i-\beta\varepsilon_i)}{w_i^4}=\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2\sigma_{12}^{*2}}{w_i^2}$$

となる. また, $s_n^2:=\sum_{i=1}^n\sigma_{ni}^2$, $S_n:=\sum_{i=1}^nX_{ni}$ とすると,

$$s_n^2=\sigma_{12}^{*2}\sum_{i=1}^n\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2}{w_i^2}, \quad S_n=\sum_{i=1}^n\frac{(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\delta_i-\beta\varepsilon_i)}{w_i^2}$$

となる. このとき, 仮定より任意の $r>0$ について

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n\frac{1}{s_n^2}\int_{|X_{ni}|\geq rs_n}X_{ni}^2dP\\
&\leq\sum_{i=1}^n\frac{1}{s_n^2}\int_{|X_{ni}|\geq rs_n}\frac{|X_{ni}|^{2+d}}{r^ds_n^d}dP\\
&=\sum_{i=1}^n\frac{|\xi_i-\bar{\xi}_{n,w}|^{2+d}}{r^ds_n^{2+d}w_i^{2(2+d)}}\int_{|X_{ni}|\geq rs_n}|\delta_i-\beta\varepsilon_i|^{2+d}dP\\
&\leq\sum_{i=1}^n\frac{|\xi_i-\bar{\xi}_{n,w}|^{2+d}}{r^ds_n^{2+d}w_i^{2(2+d)}}E\left[|\delta_i-\beta\varepsilon_i|^{2+d}\right]\\
&=\frac{1}{r^d\left(\sigma_{12}^{*2}\sum_{i=1}^n(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})^2/w_i^2\right)^{1+(d/2)}}\sum_{i=1}^n\frac{|\xi_i-\bar{\xi}_{n,w}|^{2+d}}{w_i^{2(2+d)}}E\left[|\delta_i-\beta\varepsilon_i|^{2+d}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\max_{i=1,\cdots,n}|(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})/w_i|^d}{r^d\sigma_{12}^{*2+d}S_{n,w}^{d/2}}\frac{\sum_{i=1}^n|\xi_i-\bar{\xi}_{n,w}|^2E\left[|\delta_i-\beta\varepsilon_i|^{2+d}\right]/w_i^{4+d}}{S_{n,w}}$$
$$\to 0 \quad (n\to\infty)$$

となるので, 補題2.1より

$$\frac{S_n}{s_n}=\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i-\bar{\xi}_{n,w})(\delta_i-\beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{S_{n,w}}}\xrightarrow{L} Z \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ. □

補題 2.5 条件 $\lim_{n\to\infty} n/\sqrt{S_{n,w}}=0$ を仮定すれば,

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty) \tag{2.20}$$

が成り立つ.

証明 まず, 任意の $r>0$ について

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\right|\geq r\right)\leq P\left(\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\leq -r\right)$$
$$+P\left(\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq r\right) \tag{2.21}$$

となる. いま,

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\leq -r$$

とすれば,

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}+\frac{\sum_{i=1}^n(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w}+\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}-2\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}$$
$$\geq -2\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}$$
$$\geq 2r$$

となる. また,

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}\geq r$$

とすれば,

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}+\frac{\sum_{i=1}^n(\delta_i-\bar{\delta}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w} + (\bar{\delta}_{n,w} - \delta_i)\right)^2 / w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} + 2\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \\
&\geq 2\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \\
&\geq 2r
\end{aligned}
$$

となる. よって

$$
\begin{aligned}
&P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \leq -r\right) + P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \geq r\right) \\
&\leq 2P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} + \frac{\sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \geq 2r\right) \\
&\leq 2P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \geq r\right) + 2P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})^2/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}}} \geq r\right) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty) \quad (\text{補題 2.2 より})
\end{aligned}
$$

となるから (2.21) より (2.20) が示された. □

定理 2.1 の証明　まず,

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{S_{n,w}}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w} - \beta) &= \sqrt{S_{n,w}}\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}\left\{(x_i - \bar{x}_{n,w})(y_i - \bar{y}_{n,w}) - \beta(x_i - \bar{x}_{n,w})^2\right\}}{\sigma_{12}^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2} \\
&= \sqrt{S_{n,w}}\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})\left\{y_i - \bar{y}_{n,w} - \beta(x_i - \bar{x}_{n,w})\right\}}{\sigma_{12}^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2} \\
&= \sqrt{S_{n,w}}\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(\xi_i - \bar{\xi}_{n,w} + \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})\left\{\delta_i - \bar{\delta}_{n,w} - \beta(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})\right\}}{\sigma_{12}^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2} \\
&= \frac{\sqrt{S_{n,w}}\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_{n,w})(\delta_i - \beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2} \\
&\quad + \frac{\sqrt{S_{n,w}}\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sigma_{12}^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2} \\
&\quad - \beta\frac{\sqrt{S_{n,w}}\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sigma_{12}^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

となる. そして, 補題 2.3 と補題 2.4 より

$$
\frac{S_{n,w}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2}\frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_{n,w})(\delta_i - \beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{S_{n,w}}} \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty) \tag{2.23}
$$

になる. また, 補題 2.3 と補題 2.5 より

$$
\frac{S_{n,w}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}(x_i - \bar{x}_{n,w})^2}\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_{n,w})(\delta_i - \bar{\delta}_{n,w})/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{S_{n,w}}} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty) \tag{2.24}
$$

となり補題 2.2 と補題 2.3 より

$$\frac{S_{n,w}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i^2}(x_i-\bar{x}_{n,w})^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_{n,w})^2/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{S_{n,w}}}\xrightarrow{P}0 \quad (n\to\infty) \tag{2.25}$$

となる. よって, (2.22)〜(2.25) より

$$\frac{\sqrt{S_{n,w}}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)\xrightarrow{L}Z \quad (n\to\infty)$$

が示され, 定理 2.1 の結論が得られる. □

定理 2.2 定理 2.1 の仮定は満たされているとし, 条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}\sum_{i=1}^{n}1/w_i^2}}=0$$

を仮定し, さらに, ある $d>0$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}1/w_i^2)^{1+(d/2)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{E\left[|\delta_i-\beta\varepsilon_i|^{2+d}\right]}{w_i^{2(2+d)}}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}1/w_i^2)^{1+(d/2)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{E\left[|\varepsilon_i|^{2+d}\right]}{w_i^{2(2+d)}}=0$$

であるとする. このとき

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\alpha}_{n,w}-\alpha)\xrightarrow{L}Z \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ.

定理 2.2 を証明するために次の 2 つの補題を述べる.

補題 2.6 ある $d>0$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}1/w_i^2)^{1+(d/2)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{E\left[|\delta_i-\beta\varepsilon_i|^{2+d}\right]}{w_i^{2(2+d)}}=0$$

であるとすれば,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\delta_i-\beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1/w_i^2}}\xrightarrow{L}Z \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ.

証明 まず, 各 $i=1,\cdots,n$ について $X_i=(\delta_i-\beta\varepsilon_i)/w_i^2$ とすると, $X_1,\cdots,X_n$ は互いに独立で, 各 i について

$E[X_i]=0,$

$$\sigma_i^2 := V[X_i] = E\left[\left(\frac{\delta_i - \beta\varepsilon_i}{w_i^2}\right)^2\right] = \frac{\sigma_{1i}^2 + \beta^2\sigma_{2i}^2 - 2\beta u_i^2}{w_i^4} = \frac{\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2 - 2\beta u_{12}}{w_i^2} = \frac{\sigma_{12}^{*2}}{w_i^2}$$

となり, $s_n^2 := \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ とすると,

$$s_n^2 = \sigma_{12}^{*2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i - \beta\varepsilon_i}{w_i^2}$$

となる. このとき, 仮定より, 任意の $r > 0$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_n^2}\int_{|X_i|\geq rs_n} X_i^2 dP &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_n^2}\int_{|X_i|\geq rs_n} \frac{|X_i|^{2+d}}{r^d s_n^d} dP \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^d s_n^{2+d}}\int_{|X_i|\geq rs_n} \left|\frac{\delta_i - \beta\varepsilon_i}{w_i^2}\right|^{2+d} dP \\
&\leq \frac{1}{r^d\sigma_{12}^{*2+d}}\frac{1}{(\sum_{i=1}^n 1/w_i^2)^{1+(d/2)}}\sum_{i=1}^n \frac{E\left[|\delta_i - \beta\varepsilon_i|^{2+d}\right]}{w_i^{2(2+d)}} \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となるので, 補題 2.1 より

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{\sum_{i=1}^n(\delta_i - \beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}} \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

となる. □

補題 2.7 ある $d > 0$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sum_{i=1}^n 1/w_i^2)^{1+(d/2)}}\sum_{i=1}^n \frac{E\left[|\varepsilon_i|^{2+d}\right]}{w_i^{2(2+d)}} = 0$$

とすれば,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i/w_i^2}{\sigma_2\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}} \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ.

証明 まず, 各 $i = 1, \cdots, n$ について $X_i = \varepsilon_i/w_i^2$ とすると, $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で, 各 i について

$$E[X_i] = 0, \quad \sigma_i^2 := V[X_i] = E\left[\left(\frac{\varepsilon_i}{w_i^2}\right)^2\right] = \frac{\sigma_{2i}^2}{w_i^4} = \frac{\sigma_2^2}{w_i^2}$$

となり, $s_n^2 := \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ とすると,

$$s_n^2 = \sigma_2^2\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i^2}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{w_i^2}$$

となる．このとき，仮定より，任意の $r>0$ について

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_n^2}\int_{|X_i|\geq rs_n}X_i^2dP &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_n^2}\int_{|X_i|\geq rs_n}\frac{|X_i|^{2+d}}{r^d s_n^d}dP\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r^d s_n^{2+d}}\int_{|X_i|\geq rs_n}\left|\frac{\varepsilon_i}{w_i^2}\right|^{2+d}dP\\ &\leq \frac{1}{r^d\sigma_2^{2+d}}\frac{1}{(\sum_{i=1}^n 1/w_i^2)^{1+(d/2)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{E\left[|\varepsilon_i|^{2+d}\right]}{w_i^{2(2+d)}}\\ &\to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

となるので，補題 2.1 より

$$\frac{S_n}{s_n}=\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i/w_i^2}{\sigma_2\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}\xrightarrow{L} Z \quad (n\to\infty)$$

となる．□

定理 2.2 の証明　まず，

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{n,w}-\alpha &= \bar{y}_{n,w}-\hat{\beta}_{n,w}\bar{x}_{n,w}-\alpha\\ &=\beta\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\delta}_{n,w}-\hat{\beta}_{n,w}(\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\varepsilon}_{n,w})\\ &=-(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)\bar{\xi}_{n,w}-(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)\bar{\varepsilon}_{n,w}+\bar{\delta}_{n,w}-\beta\bar{\varepsilon}_{n,w}\\ &=-(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)(\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\varepsilon}_{n,w})+\bar{\delta}_{n,w}-\beta\bar{\varepsilon}_{n,w}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\alpha}_{n,w}-\alpha) &= -\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)(\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\varepsilon}_{n,w})\\ &\quad +\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\bar{\delta}_{n,w}-\beta\bar{\varepsilon}_{n,w})\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)(\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\varepsilon}_{n,w})\xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty) \tag{2.26}$$

が成り立つ．なぜなら

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)(\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\varepsilon}_{n,w})=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sqrt{S_{n,w}}}(\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\varepsilon}_{n,w})\frac{\sqrt{S_{n,w}}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w}-\beta)$$

となり，

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sqrt{S_{n,w}}}(\bar{\xi}_{n,w}+\bar{\varepsilon}_{n,w}) &= \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sqrt{S_{n,w}}}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i/w_i^2}{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}+\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i/w_i^2}{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}\right)\\ &=\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}+\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}\end{aligned}$$

となる. 条件より

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}} = 0 \quad (n \to \infty)$$

となり, $1/\sqrt{S_{n,w}} \to 0 \quad (n \to \infty)$ となることと, 補題2.7より

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i/w_i^2}{\sqrt{S_{n,w}\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

となることより

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sqrt{S_{n,w}}}(\bar{\xi}_{n,w} + \bar{\varepsilon}_{n,w}) \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

となる. また, 定理2.1より

$$\frac{\sqrt{S_{n,w}}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w} - \beta) \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

となり,

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sqrt{S_{n,w}}}(\bar{\xi}_{n,w} + \bar{\varepsilon}_{n,w})\frac{\sqrt{S_{n,w}}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\beta}_{n,w} - \beta) \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

となるので (2.26) が成り立つ. また

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\bar{\delta}_{n,w} - \beta\bar{\varepsilon}_{n,w}) = \frac{\sum_{i=1}^n(\delta_i - \beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}$$

となり, 補題2.6より

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\delta_i - \beta\varepsilon_i)/w_i^2}{\sigma_{12}^*\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}} \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

となるので,

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\bar{\delta}_{n,w} - \beta\bar{\varepsilon}_{n,w}) \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

となり, (2.26) より

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n 1/w_i^2}}{\sigma_{12}^*}(\hat{\alpha}_{n,w} - \alpha) \xrightarrow{L} Z \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. □

3 非線形の変数誤差モデル

本節において, Fazekas and Kukush [FK97] に従って, 非線形の変数誤差モデル

$$y_i = g(\xi_i, \beta_0) + \delta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots),$$
$$x_i = \xi_i + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

における推定量の一致性と大偏差確率の評価について考える. ここで, 各 i について y_i と x_i は観測され, $\xi_1, \xi_2, \cdots$ は局外母数で, ε_i と δ_i は確率誤差項, g は既知の関数, β_0 は推定されるべき母数 β の真の母数とする. また, 母数空間を Θ とし, $\beta_0 \in \Theta \subset \mathbf{R}^p$ とする. さらに, 各 $i = 1, 2, \cdots$ について $x_i, \xi_i, \varepsilon_i$ は q 次元ベクトル, y_i, δ_i はスカラーとし, g を $g : \mathbf{R}^q \times \Theta \to \mathbf{R}$ とする. ここで, 次の条件を仮定する.

(A1) $\{\delta_i : i = 1, 2, \cdots\}$ と $\{\varepsilon_i : i = 1, 2, \cdots\}$ は独立で, $E(\varepsilon_1) = 0, E(\delta_1) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$ である.

(A2) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ は, 独立同分布に従う確率変数列である.

(A3) $\Theta \subset U$ となる開集合 U が存在し, また関数 $f \in C(\mathbf{R}^q \times U)$ が存在して, 任意の $\xi \in \mathbf{R}^q$ と任意の $\beta \in \Theta$ について, $E[f(\xi + \varepsilon_1, \beta)] = g(\xi, \beta)$ である.

(A4) 関数 $h \in C(\mathbf{R}^q \times U)$ が存在して, 任意の $\xi \in \mathbf{R}^q$ と任意の $\beta \in \Theta$ について, $E[h(\xi + \varepsilon_1, \beta)] = g^2(\xi, \beta)$ である.

ここでは, $\{\delta_i\}$ は独立同分布に従うことを仮定しない. そこで, 完全加法族 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ について

$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(B|A) - P(B)|$$

と定義して, M_k^l を, $\{\delta_i; k \le i \le l\}$ によって生成される完全加法族とし, $t \ge 0$ とする. また,

$$\varphi(n) := \sup_{1 \le k < \infty} \varphi(M_1^k, M_{k+n}^\infty), \quad j(t) := 2 \min\{k \in \mathbf{N}; 2k \ge t\}$$

とする. さらに, 次の条件を仮定する.

(A5) $\displaystyle a(\varphi, t) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/j(t)}(k)(k+1)^{j(t)-2} < \infty.$

いま, 修正最小2乗法によって, $Q_n(\beta) = (1/n)\sum_{i=1}^n \{(y_i - f(x_i, \beta))^2 + h(x_i, \beta) - f^2(x_i, \beta)\}$ を最小にする β を $\hat{\beta}_n$ とし, これを修正最小2乗 (LS) 推定量という. さらに次の条件を設ける.

(B1) 母数空間 Θ はコンパクトである.

(B2) 関数 g は有界である.

(B3) 任意の $\{\xi_n\}$, 任意の $\beta_* \in \Theta$, 任意の $a > 0$ について

$$\varliminf_{n \to \infty} \inf_{\|\beta - \beta_*\| \ge a} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(\xi_i, \beta) - g(\xi_i, \beta_*))^2 > 0$$

である.

(B4) 任意の $d > 0$ について, ある $l > 0$ が存在して, 任意の $s \in \mathbf{R}^q$ について $\|\beta_1 - \beta_2\| < l$

ならば, $|g(s,\beta_1)-g(s,\beta_2)|<d$ である.

(B5) $\displaystyle\lim_{l\to 0}\sup_{\xi} E\left[\sup_{||\beta_1-\beta_2||\le l}|f(\xi+\varepsilon_1,\beta_1)-f(\xi+\varepsilon_1,\beta_2)|\right]=0.$

(B6) $\displaystyle\lim_{l\to 0}\sup_{\xi} E\left[\sup_{||\beta_1-\beta_2||\le l}|h(\xi+\varepsilon_1,\beta_1)-h(\xi+\varepsilon_1,\beta_2)|\right]=0.$

(B7) 任意の$\beta\in\Theta$ について, $\sup_n E[|f(x_n,\beta)|^t]<\infty$.

(B8) 任意の$\beta\in\Theta$ について, $\sup_n E[|h(x_n,\beta)|^t]<\infty$.

(B9) 任意の$\beta\in\Theta$ について, $\sup_n E[|\delta_n|^t]<\infty$.

このとき 次のことが成り立つ.

定理 3.1 ([FK97]). 非線形の変数誤差モデルの下で, 条件 (A1)〜(A4), (B1)〜(B6) を仮定する. さらに, ある$t>1$について条件 (A5) を仮定し, 条件 (B7)〜(B9) を満たすものとする. このとき, 修正 LS 推定量 $\hat{\beta}_n$ は β_0 の一致推定量である.

次に, 修正 LS 推定量の大偏差確率の評価について考えるために次の条件を設ける.

(C1) 母数空間 Θ はコンパクト, かつ凸である.

(C2) $\Psi_n(\beta_1,\beta_2):=(1/n)\sum_{i=1}^n(g(\xi_i,\beta_1)-g(\xi_i,\beta_2))^2$ とするとき, $K_1,K_2(0<K_1\le K_2<\infty)$ が存在して, 任意の $\beta_1,\beta_2\in\Theta$, 任意の $n\in\mathbf{N}$ について, $K_1||\beta_1-\beta_2||^2\le\Psi_n(\beta_1,\beta_2)\le K_2||\beta_1-\beta_2||^2$ である.

$(C3)$ 期待値

$$E\left[\sup_{\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial f(\xi+\varepsilon_1,\beta)}{\partial\beta}\right|^r\right]$$

は, ξ の関数として有界である.

$(C4)$ 期待値

$$E\left[\sup_{\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial h(\xi+\varepsilon_1,\beta)}{\partial\beta}\right|^r\right]$$

は, ξ の関数として有界である.

定理 3.2 ([FK97]). 上記の非線形の変数誤差モデルの下で, 条件 (A1), (A2), (A3), (A4), (B2), (C1), (C2) を仮定する. また, $2\le r,\ p<r$ となる, ある定数rが存在し, $t=r$で, 条件 (A5), (B9) が成り立ち, また, (C3), (C4) が成り立つとする. このとき, $c>0$ が存在して, 任意の $\rho>0$, 任意の$n\in\mathbf{N}$について

$$P\left(\sqrt{n}||\hat{\beta}_n-\beta_0||\ge\rho\right)\le\frac{c}{\rho^r}$$

が成り立つ.

4 おわりに

本論では単回帰型の変数誤差モデルにおいて, 独立であるが同一でない分布に従う場合に係数の最小2乗推定量の漸近正規性を示したが, その条件はもっと緩めることができるかもしれない. また, 非線形の変数誤差モデルにおいて [FK97] に基づいて母数の修正最小2乗推定量の一致性と大偏差確率の評価を行ったが, 漸近正規性についても考える必要がある.

参考文献

[AK00] 赤平昌文・河合伸一 (2000). Estimation by the method of moments in the errors-in-variables model. 京都大学　数理解析研究所講究録 **1161**, 159-163.

[B95] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*, 3rd ed., Wiley, New York.

[FK97] Fazekas, I. and Kukush, A. G. (1997). Asymptotic properties of an estimator in nonlinear functional errors-in-variables models with dependent error terms . *Comput. Math. Appl.*, **34**(10), 23-39.

[F87] Fuller, W. A. (1987). *Measurment Error Models.* Wiley, New York.

[G81] Gleser, L. J. (1981). Estimation in a multivariate "errors in variables" regression model: Large sample results. *Ann. Statist.*, **9**(1), 24-44

[L99] Lehmann, L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory.* Springer, New York.

[MYS07] Miao, Y., Yang, G. and Shen, L. (2007). The central limit theorem for LS estimator in simple linear EV regression models. To appear in *Commun. Statist.-Theory and Methods.*, **36**(12).